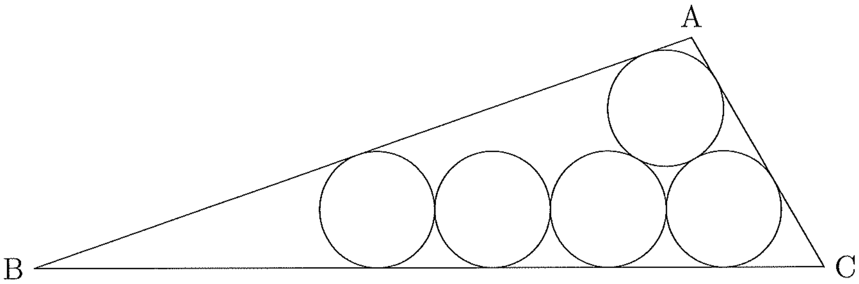
数学 I



図のように三角形 ABC の内部に半径 1 の円が 5 つ含まれている．4 つの円は辺 BC に接しながら横一列に互いに接しながら並び，左端の円は辺 AB に接し，右端の円は辺 AC に接している．また，もう一つの円は，辺 AB と辺 AC に接し，4 つの円の右側の 2 つの円に接している．このとき

$$\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{\boxed{(1)}\boxed{(2)}}}{\boxed{(3)}\boxed{(4)}}\mathrm{BC} \qquad \mathrm{AC} = \frac{\boxed{(5)}\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}\boxed{(8)}}\mathrm{BC}$$

$$\mathrm{BC} = \frac{\boxed{(9)}\boxed{(10)} + \boxed{(11)}\boxed{(12)}\sqrt{\boxed{(13)}\boxed{(14)}} + \boxed{(15)}\boxed{(16)}\sqrt{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}}{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}$$

である．ただし，$\boxed{(13)}\boxed{(14)} < \boxed{(17)}\boxed{(18)}$ とする．

環

数学II

トランプを使って行うゲームの一つであるポーカーは，プレイヤーのもつ 5 枚のカードの組合せの強さを競うゲームである．トランプはジョーカーを除いた，スペード (♠)・クラブ (♣)・ダイヤモンド (♢)・ハート (♡) の 4 つのスート (あるいはスーツとも呼ばれる) のそれぞれに 1 から 13 までの数が書かれた 52 枚のカードからなる (1, 11, 12, 13 の代わりに，A, J, Q, K の記号を用いることが多い).

5 枚のカードの組合せには，強い順に以下の種類がある．

- **ストレートフラッシュ**: 同じスートのカードが 5 枚順番に並ぶ
- **フォーカード**: 同じ数のカードが 4 枚揃い，それ以外のカードが 1 枚
- **フルハウス**: 同じ数のカードが 3 枚揃い，別の数のカードが 2 枚揃う
- **フラッシュ**: 同じスートのカードが 5 枚揃うが，順番ではない
- **ストレート**: 数が 5 枚順番に並ぶが，スートはひとつに揃っていない
- **スリーカード**: 同じ数のカードが 3 枚揃うが，残り 2 枚はそれぞれ別の数
- **ツーペアー**: 同じ数のカードが 2 枚揃う組がふたつ別の数であり，残りの 1 枚もそれらとは別の数
- **ワンペアー**: 同じ数のカードが 2 枚揃い，残りはそれぞれ別の数
- **カードハイ**: 上記以外

なお，A を 1 と考えて A, 2, 3, 4, 5 がストレートおよびストレートフラッシュとなるだけでなく，A を K に続く数と考えて 10, J, Q, K, A もストレートおよびストレートフラッシュとして許す．しかし，A を超えて J, Q, K, A, 2 のように 2 まで含めるものは許さない．

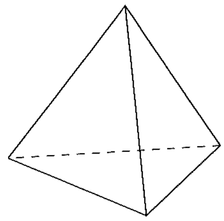
52 枚のカードから 5 枚を抜き出す組合せの数は ${}_{52}C_5 = 2598960$ 通りあるが，それがストレートフラッシュとなる組合せの数を求めてみよう．ストレートフラッシュの 5 枚のカードの最小の数は $1, 2, \ldots,$ $\boxed{(21)\,(22)}$ のどれかであるから，それぞれのスートごとに $\boxed{(21)\,(22)}$ 通り考えられる．よって，$4 \times \boxed{(21)\,(22)} = \boxed{(23)\,(24)}$ 通りのストレートフラッシュの組合せがある．また，ストレートについては，数は順番に並んでいるが，スートが揃っていない組合せの数なので $\boxed{(25)\,(26)\,(27)\,(28)\,(29)}$ 通りある．

次に，フルハウスとなる組合せの数を求めてみよう．同じ数のカードが 3 枚と 2 枚のふたつの組があり，3 枚の組を選ぶ組合せは $\boxed{(30)\,(31)} \times {}_4C_3$，残りの 2 枚のカードを選ぶ組合せは $\boxed{(32)\,(33)} \times {}_4C_2$ であるから，フルハウスとなる組合せの数は $\boxed{(30)\,(31)} \times {}_4C_3 \times \boxed{(32)\,(33)} \times {}_4C_2 = \boxed{(34)\,(35)\,(36)\,(37)}$ 通りである．ただし $\boxed{(30)\,(31)} \geqq \boxed{(32)\,(33)}$ とする．

環

数学Ⅲ

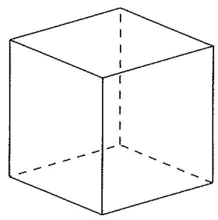
(1)　各面が白色あるいは黒色で塗られた正四面体について，いずれか 1 つの面を等確率 $\frac{1}{4}$ で選択し，選択した面を除いた 3 つの面の色を，白色であれば黒色に，黒色であれば白色に塗り直す試行を繰り返す．正四面体のすべての面が白色の状態から開始するとき



(a) 2 つの面が白色，2 つの面が黒色になる最小の試行回数は $\boxed{(38)}\boxed{(39)}$ 回であり，この試行回数で同状態が実現する確率は $\dfrac{\boxed{(40)}\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}}$ である．

(b) すべての面が黒色になる最小の試行回数は $\boxed{(44)}\boxed{(45)}$ 回であり，この試行回数で同状態が実現する確率は $\dfrac{\boxed{(46)}\boxed{(47)}}{\boxed{(48)}\boxed{(49)}}$ である．

(2)　各面が白色あるいは黒色で塗られた立方体について，いずれか 1 つの面を等確率 $\frac{1}{6}$ で選択し，選択した面を除いた 5 つの面の色を，白色であれば黒色に，黒色であれば白色に塗り直す試行を繰り返す．立方体のすべての面が白色の状態から開始するとき



(a) 3 つの面が白色，3 つの面が黒色になる最小の試行回数は $\boxed{(50)}\boxed{(51)}$ 回であり，この試行回数で同状態が実現する確率は $\dfrac{\boxed{(52)}\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}\boxed{(55)}}$ である．

(b) すべての面が黒色になる最小の試行回数は $\boxed{(56)}\boxed{(57)}$ 回であり，この試行回数で同状態が実現する確率は $\dfrac{\boxed{(58)}\boxed{(59)}\boxed{(60)}}{\boxed{(61)}\boxed{(62)}\boxed{(63)}}$ である．

数学Ⅳ

$A_n=\{1,2,\ldots,n\}$ を，1 から n までの自然数の集合とする．S を A_n の部分集合 (空集合および A_n 自身も含む) としたとき，S' を S の要素それぞれに 1 を加えてできた集合とする．また，S'' を S' の要素それぞれにさらに 1 を加えてできた集合とする．たとえば，$A_3=\{1,2,3\}$ の部分集合 $S=\{1,3\}$ の場合，$S'=\{2,4\}$ および $S''=\{3,5\}$ となる．

(1) $A_4=\{1,2,3,4\}$ の部分集合 $S=\{1,2,3\}$ は $S\cup S'=A_4$ となる．このように A_4 の部分集合 S で $S\cup S'=A_4$ となるものは，$\{1,2,3\}$ と $\{1,\boxed{(64)}\}$ の 2 つである．

(2) A_n の部分集合 S で $S\cup S'=A_n$ となるような S の個数を a_n とすると，(1) から分かるように $a_4=2$ であり

$$a_5=\boxed{(65)}\boxed{(66)},\quad a_6=\boxed{(67)}\boxed{(68)},\quad a_7=\boxed{(69)}\boxed{(70)},\quad a_8=\boxed{(71)}\boxed{(72)},\quad \ldots,\quad a_{16}=\boxed{(73)}\boxed{(74)}\boxed{(75)}$$

となる．

(3) $A_4=\{1,2,3,4\}$ の部分集合 S で $S\cup S''=A_4$ となるものは，$S=\{1,\boxed{(76)}\}$ だけである．

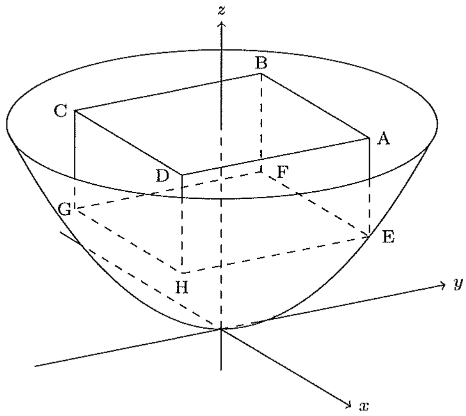
(4) A_n の部分集合 S で $S\cup S''=A_n$ となるような S の個数を b_n とすると，(3) から分かるように $b_4=1$ であり

$$b_5=\boxed{(77)}\boxed{(78)},\quad b_6=\boxed{(79)}\boxed{(80)},\quad b_7=\boxed{(81)}\boxed{(82)},\quad b_8=\boxed{(83)}\boxed{(84)},\quad \ldots,\quad b_{16}=\boxed{(85)}\boxed{(86)}\boxed{(87)}$$

となる．

数学V

xyz 空間において，直方体 ABCD–EFGH が $z \geqq x^2 + y^2$ $(0 \leqq z \leqq 1)$ を満たす立体の周辺および内部に存在する．この直方体の面 ABCD，EFGH は xy 平面に平行であり，頂点 A, B, C, D は平面 $z = 1$ 上に，頂点 E, F, G, H は曲面 $z = x^2 + y^2$ 上に存在する．



(1) 直方体 ABCD–EFGH の面 ABCD および EFGH が 1 辺の長さ a の正方形のとき，正の実数である a の取り得る値の範囲は $0 < a < \sqrt{\boxed{(88)}\boxed{(89)}}$ であり，この直方体の体積は $\dfrac{\boxed{(90)}\boxed{(91)}}{\boxed{(92)}\boxed{(93)}} a^4 + \boxed{(94)}\boxed{(95)}\, a^2$ である．

(2) 直方体 ABCD–EFGH の面 ABFE および DCGH が 1 辺の長さ b の正方形のとき，正の実数である b の取り得る値の範囲は $0 < b < \boxed{(96)}\boxed{(97)} + \boxed{(98)}\boxed{(99)} \sqrt{\boxed{(100)}\boxed{(101)}}$ であり，この直方体の体積は $b^2 \sqrt{\boxed{(102)}\boxed{(103)}\, b^2 + \boxed{(104)}\boxed{(105)}\, b + \boxed{(106)}\boxed{(107)}}$ である．

(3) 直方体 ABCD–EFGH のすべての面が 1 辺の長さ c の正方形のとき，すなわち直方体 ABCD–EFGH が立方体のとき，正の実数である c の値は $\boxed{(108)}\boxed{(109)} + \sqrt{\boxed{(110)}\boxed{(111)}}$ であり，立方体 ABCD–EFGH の体積は $\boxed{(112)}\boxed{(113)}\boxed{(114)} + \boxed{(115)}\boxed{(116)} \sqrt{\boxed{(117)}\boxed{(118)}}$ である．

数学VI

ある国の有識者会議が，経済活性化に資する公共サービスの供給量 x と，医療・公衆衛生に関する公共サービスの供給量 y の組合せの検討を行っている．供給量の組合せ (x,y) は，予算やマンパワー，既存の法律など，さまざまな要因により，その実現可能性に制約を受け，次の不等式を満たすものとする．

$$\begin{cases} 2x+5y \leqq 405 & \cdots\cdots(1) \\ x^2+75y \leqq 6075 & \cdots\cdots(2) \\ x \geqq 0 & \cdots\cdots(3) \\ y \geqq 0 & \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

供給量の組合せ (x,y) を x 軸と y 軸の 2 次元座標で表わすと，実現可能な供給量の組合せ (x,y) の領域は，$0 \leqq x \leqq \boxed{(119)}\boxed{(120)}$ の範囲で (1) と (4) を満たす (x,y) の部分の領域と，$\boxed{(119)}\boxed{(120)} \leqq x \leqq \boxed{(121)}\boxed{(122)}\sqrt{\boxed{(123)}\boxed{(124)}}$ の範囲で (2) と (4) を満たす (x,y) の部分の領域の 2 つからなることが分かる．

いま，有識者会議の目標が xy の最大化であるとすると，供給量の組合せを

$$(x,y)=\left(\boxed{(125)}\boxed{(126)},\ \boxed{(127)}\boxed{(128)}\right)$$

とする結論を得る．

次に，情勢の変化に伴って，上記の (1), (2), (3), (4) に新たな不等式

$$x+y \leqq 93 \quad \cdots\cdots(5)$$

が加わったとすると，実現可能な (x,y) の領域は，$0 \leqq x \leqq \boxed{(129)}\boxed{(130)}$ の範囲で (1) と (4) を満たす (x,y) の部分の領域と，$\boxed{(129)}\boxed{(130)} \leqq x \leqq \boxed{(131)}\boxed{(132)}$ の範囲で (5) と (4) を満たす (x,y) の部分の領域と，$\boxed{(131)}\boxed{(132)} \leqq x \leqq \boxed{(121)}\boxed{(122)}\sqrt{\boxed{(123)}\boxed{(124)}}$ の範囲で (2) と (4) を満たす (x,y) の部分の領域の 3 つに分けることができる．また，政府の方針にそって，有識者会議の目標が x^2y の最大化に変更されたとすると，供給量の組合せを

$$(x,y)=\left(\boxed{(133)}\boxed{(134)},\ \boxed{(135)}\boxed{(136)}\right)$$

とする結論を導くことになる．